



NOVÉ TECHNOLOGIE
VÝZKUMNÉ CENTRUM
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

ODBOR MODELOVÁNÍ DEFORMAČNÍCH A DYNAMICKÝCH PROCESŮ

AUTORIZOVANÝ SOFTWARE

NOMUVIBLAD_ESS1

***SOFTWARE PRO ANALÝZU NELINEÁRNÍCH
MULTIHARMONICKÝCH VIBRACÍ OLOPATKOVANÝCH
DISKŮ S BUZENÍM PROSTOROVĚ NEHYBNÝM***

Autor: *RNDr. Josef Voldřich, CSc.*

Číslo projektu: *1M06059*

Číslo výsledku: *NTC-SW-14-10*

Odpovědný pracovník: *RNDr. Josef Voldřich, CSc.*

Vedoucí odboru: *RNDr. Josef Voldřich, CSc.*

Ředitel centra: *doc. Dr. RNDr. Miroslav Holeček*

PLZEŇ, PROSINEC 2010

Jazyk výsledku: CZE

Hlavní obor: JR

Uplatněn: ANO

Dostupnost: <http://www.zcu.cz/ntc/vysledky/sw/NTC-SW-14-10.html>

Název výsledku česky:

NOMUVIBLAD_ESS1 - Software pro analýzu nelineárních multiharmonických vibrací olopatkovaných disků s buzením prostorově stacionárním (vzhledem k souřadnému systému rotujícího disku)

Název výsledku anglicky:

NOMUVIBLAD_ESS1 - Software for the analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks excited stationary in space (relative to the system of coordinates moving with the bladed disk).

Abstrakt k výsledku česky:

NOMUVIBLAD_ESS1 umožňuje provádět analýzu nelineárních multiharmonických vibrací olopatkovaných disků s třecími kontakty s využitím jejich cyklické symetrie. Buzení je vzhledem k souřadnému systému spojenému s rotujícím diskem prostorově stacionární, tedy stejné na každém sektoru periodicity uvažované cyklické symetrie. Metodika analýzy je založená na teoretických pracech Petrova a Ewinse z Imperial College London.

Abstrakt k výsledku anglicky:

NOMUVIBLAD_ESS1 enables to perform the analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks with friction contacts using their cyclic symmetry properties. The type of excitation is stationary in the coordinate system fixed to the disk, that is the excitation is the same for every sector of the cyclic symmetry considered. The method of analysis is based on theoretical studies of Petrov and Ewins of Imperial College London.

Klíčová slova česky:

nelineární vibrace; olopatkovaný disk; kontakt se třením; cyklická symetrie

Klíčová slova anglicky:

nonlinear vibrations; bladed disk; friction contact; cyclic symmetry

Vlastník výsledku: *Západočeská univerzita v Plzni*

IČ vlastníka výsledku: *49777513*

Stát: *Česká republika*

Lokalizace: <http://www.zcu.cz/ntc/vystupy/sw/NTC-SW-14-10.html>

Licence: *ANO*

Licenční poplatek: *ANO*

Ekonomické parametry: *Software umožňuje pomocí výpočetních simulací lépe porozumět procesu oddělujícího lisování porézního média, a následně zvýšit efektivitu tohoto procesu v řadě navržených technologických zařízení. Větší ekonomický přínos souvisí např. s lisováním olejin.*

Technické parametry: *Luděk Hynčík, Západočeská univerzita v Plzni, Nové technologie - Výzkumné centrum v západočeském regionu, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, 377634709, hyncik@ntc.zcu.cz*

Obsah

1	Úvod	5
2	Značení	6
3	Základy popisu periodických rotačně symetrických struktur	8
3.1	Popis olopatkovaného disku	8
3.2	Rovnice pohybu a aplikované podmínky	9
3.3	Typy zatěžovacích sil	10
3.3.1	Buzení typu cestující vlny (Travelling Wave)	10
3.3.2	Buzení prostorově stacionární	10
4	Sektorový model s multiharmonickou formulací	11
4.1	Multiharmonický rozvoj posuvů	11
4.2	Formulace založená na užití konečných prvků	12
4.3	Popis rozdělení sektoru na vnitřek a části hranice	13
5	Komplexní aritmetika a užití matic funkce frekvenční odezvy	15
5.1	Formulace užívající cyklické symetrie	15
5.2	Formulace vyjádřená pomocí aritmetiky komplexních čísel	15
5.3	Multiharmonická formulace užívající FRF matice	16
5.3.1	Vyloučení lineárních stupňů volnosti z nelineárních rovnic	17
5.3.2	Výpočet sektorové matice FRF	17
5.3.3	Člen s vektorem budících sil	18
6	Řešení nelineárních rovnic	19
6.1	Nelineární rovnice ve formulaci pomocí reálné aritmetiky	19
6.2	Nelineární rovnice ve formulaci pomocí komplexní aritmetiky	19
7	Element modelující nelineární vazbu - kontakt se třením	21
7.1	Značení	21
7.2	Modelování nelineárních kontaktních sil	21
7.3	Vektory harmonických koeficientů kontaktních sil	22
	Literatura	23
8	Popis formátu vstupních soubor	25
9	Popis formátu výstupních soubor	32

Kapitola 1

Úvod

Software NOMUVIBLAD-ESS1 (Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Bladed Disks - Excitation Stationary in Space) je určen pro analýzu nelineárních multiharmonických vibrací olopatkovaných disků vykazující cyklickou symetrii. Buzení vnějšími silami (momenty) je uvažováno jako “prostorově nehybné” vzhledem k rotačnímu systému spojenému s diskem.

Cyklická symetrie olopatkovaných disků je již dlouhou dobu užívána při analýze lineárních vibrací. Analýza celého souboru olopatkovaného disku je při tom redukována na analýzu pouhého jednoho sektoru, který zpravidla obsahuje jednu lopatku s příslušnou částí disku. Metody, jak využít cyklické symetrie pro analýzu vlastních frekvencí a tvarů lineárních mechanických struktur, se začaly vyvíjet před více než 30 lety. Z mnoha prací citujme alespoň práce [11] a [17], které věnují pozornost i teoretickým základům. Výpočet vlastních čísel a tvarů lineárních rotačních struktur je dnes ovšem implementován i v některých komerčních balících. Zmínit můžeme především program ANSYS, který pro uvedené účely využíváme.

Na rozdíl od lineární problematiky se výhody cyklické symetrie v nelineárních systémech využívají prakticky až v posledním desetiletí. Až do práce Petrova [1] z Imperial College London nebyly v literatuře dostupné rigorózní formulace a univerzální metody, které by důsledně využily výhodu cyklické symetrie pro analýzu silných nelineárních vibrací. Metodika software NOMUVIBLAD-ESS1 vychází právě z těchto prací.

Kapitola 2

Značení

Nomenklatura

$\otimes$	Kroneckerův maticový součin
$\tilde{\mathbf{X}}$	vektor nebo matice $\mathbf{X}$ bez stupňů volnosti uzlů pravé hranice sektoru
$\mathcal{X}^*$	matice Hermitovsky konjugovaná ke komplexní matici $\mathbf{X}$
j	index vztahující se k j -tému sektoru
L	index vztahující se k levé hranici sektoru
R	index vztahující se k pravé hranici sektoru
ln	exponent vztahující se k lineárním stupňům volnosti
nl_n	exponent vztahující se k nelineárním stupňům volnosti
$\mathbf{C}$	matice tlumení sektoru
$\mathbf{D}(\omega)$	matice dynamické tuhosti
$\mathbf{E}^{FE}(\mathbf{Q})$	vektor reziduí
$\mathbf{f}_L$	vektor sil nelineární interakce levé hranice sektoru
$\mathbf{f}_R$	vektor sil nelineární interakce pravé hranice sektoru
$\mathbf{F}$	vektor harmonických komponent nelineárních sil
$\mathbf{F}_k^c, \mathbf{F}_k^s$	kosínové a sínové komponenty vektoru $\mathbf{F}$
$\mathbf{G}$	transformační matice
$\mathbf{G}_k$	bloky transformační matice
$\mathbf{H}^T$	vektor harmonických funkcí
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$j = \sqrt{-1}$	imaginární jednotka
$\mathbf{K}$	matice tuhosti sektoru
$\mathbf{M}$	matice hmotnosti sektoru
n	počet uvažovaných harmonických složek
N	řád cyklické symetrie
N_q	počet stupňů volnosti sektoru
N_k	počet tvarů užitých v modálním rozvoji
N_{ln}	počet lineárních stupňů volnosti
N_{nl_n}	počet nelineárních stupňů volnosti
$\mathbf{p}$	vektor excitačních sil referenčního sektoru (v cylidrických souřadnicích)
$\mathbf{p}_j$	vektor budících sil j -tého sektoru (v cylidrických souřadnicích)

$\mathbf{P}$	vektor harmonických komponent budících sil
$\mathbf{P}_k^c, \mathbf{P}_k^s$	vektor kosinové a sinové k-té harmonické komponenty budících sil
$\mathbf{q}$	vektor posuvů referenčního sektoru (v cylidrických souřadnicích)
$\ddot{\mathbf{q}}$	druhá derivace vektoru posuvů podle času (vektor zrychlení)
$\dot{\mathbf{q}}$	první derivace vektoru posuvů podle času (vektor rychlosti)
$\mathbf{q}_j$	vektor posuvů j -tého sektoru (v cylidrických souřadnicích)
$\mathbf{q}_L$	vektor posuvů uzlů levé hranice sektoru
$\mathbf{q}_R$	vektor posuvů uzlů pravé hranice sektoru
$\mathbf{Q}$	celkový vektor harmonických koeficientů
$\tilde{\mathbf{Q}}_k$	vektor k-tého harmonického koeficientu neobsahující stupně volnosti uzlů pravé hranice sektoru
$\mathbf{Q}_L$	vektor harnomických posuvů příslušný uzlům levé hranice sektoru
$\mathbf{Q}_R$	vektor harnomických posuvů příslušný uzlům pravé hranice sektoru
$\mathbf{Q}_j^c$	vektor kosinového harmonického koeficientu j -tého sektoru
$\mathbf{Q}_j^s$	vektor sinového harmonického koeficientu j -tého sektoru
$\mathbf{Q}_{Lk}^c, \mathbf{Q}_{Lk}^s$	vektory kosinového a sinového k-tého harmonického koeficientu vztahující se k levé hranici sektoru
$\mathbf{Q}_{Ik}^c, \mathbf{Q}_{Ik}^s$	vektory kosinového a sinového k-tého harmonického koeficientu vztahující se k vnitřím uzlům sektoru
$\mathbf{Q}_{Rk}^c, \mathbf{Q}_{Rk}^s$	vektory kosinového a sinového k-tého harmonického koeficientu vztahující se k pravé hranici sektoru
$\mathbf{T}$	transformační matice
N	řád cyklické symetrie
$\mathbf{Z}(\omega)$	matice dynamické tuhosti sektoru lineární části systému
$\mathbf{Z}_k$	matice dynamické tuhosti k-té harmonické komponenty
t	čas
$\tau = \omega t$	bezrozměrný čas
ω	úhlová rotační rychlost buzení
$\tilde{\mathbf{A}}_k$	komplexní sektorová FRF matice pro k-tou harmoniku
$\tilde{\mathcal{F}}_k^{nln}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nln})$	komplexní vektor nelineárních sil pro k-tou harmoniku
$\mathcal{Q}_k$	komplexní vektor posuvů pro k-tou harmoniku
$\mathcal{Z}_k$	matice komplexní dynamické tuhosti pro k-tou harmoniku

Vektory budeme dále značit malými tučnými písmeny. Výjimkou je celkový vektor zahrnující harmonické koeficienty, který značíme ve shodě s [1] velkým písmenem $\mathbf{Q}$. Kaligrafickým písmem pak značíme komplexní matice nebo vektory odpovídající příslušným reálným maticím nebo vektorům, např. $\mathcal{Q}$ odpovídá vektoru $\mathbf{Q}$.

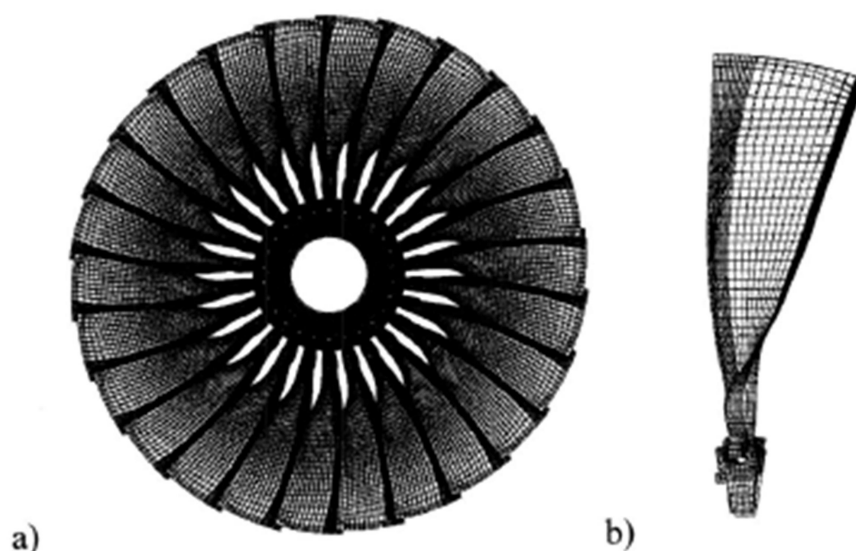
Kapitola 3

Základy popisu periodických rotačně symetrických struktur

3.1 Popis olopatkovaného disku

Olopatkované disky jsou ve většině případů navrženy jako cyklicky symetrické. To znamená, že celou strukturu můžeme obdržet jednoduchou rotací jeho “cyklické” části, kterou budeme nazývat sektorem. Nechť přirozené číslo N značí řád uvažované cyklické symetrie. Tedy postupnou rotací “sektoru” o úhel $2\pi/N$ můžeme vygenerovat celou strukturu.

Příklad olopatkovaného disku spolu s jeho sektorem můžeme vidět na obrázku 3.1. Protože v tomto příkladě je $N = 26$, výrazně se užitím cyklické symetrie snižuje počet stupňů volnosti diskretizace matematického modelu. Je potřeba si uvědomit, že při užití metody konečných prvků může pouze počet stupňů volnosti jednoho sektoru mít desetitisíce stupňů volnosti. U posledních stupňů nízkotlakých rotorů parních turbín dokonce číslo N přesahuje šedesát. Zkroucené dlouhé lopatky se stromečkovým závěsem pak je možné postihnout nosníkovými prvky jen velmi přibližně, tedy snížení počtu stupňů lopatky může představovat značný problém.



Obrázek 3.1: Cyklicky symetrický olopatkovaný disk: a) celá struktura s 26 sektory, b) (referenční) sektor.

3.2 Rovnice pohybu a aplikované podmínky

Uvažujme souřadnicový systém pevně spojený s rotujícím olopatkovaným diskem. Posuvy a působící síly budeme zásadně vyjadřovat v cylindrických souřadnicích s osou z shodnou s osou rotace. V takovém případě matice tuhosti, matice hmotnosti a tlumení jsou pro všechny sektory totožné a můžeme je tedy psát bez indexů, tj. po řadě $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ a $\mathbf{C}$. Rovnice pohybu j -tého sektoru ($j = 1, \dots, N$) pro cyklicky symetrický olopatkovaný disk pak můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_j(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_j(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}_j(t) + \mathbf{f}_I(\mathbf{q}_j(t)) + \mathbf{f}_L(\mathbf{q}_{j-1}(t), \mathbf{q}_j(t)) + \mathbf{f}_R(\mathbf{q}_j(t), \mathbf{q}_{j+1}(t)) = \mathbf{p}_j(t) . \quad (3.1)$$

V této rovnici značí

$\mathbf{q}_j(t)$	vektor posuvů v čase t (j -tého sektoru),
$\mathbf{p}_j(t)$	vektor budících sil v čase t (j -tého sektoru),
$\mathbf{f}_I(\mathbf{q}_j)$	vektor nelineárních sil záviselých pouze na posuvech,
$\mathbf{f}_L(\mathbf{q}_{j-1}, \mathbf{q}_j)$	vektor sil nelineární interakce, které působí na j -tý sektor zleva sousedním $j - 1$ -vním sektorem,
$\mathbf{f}_R(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_{j+1})$	vektor sil nelineární interakce, které působí na j -tý sektor zprava sousedním $j + 1$ -vním sektorem.

Vzhledem k cyklické symetrii je funkční závislost $\mathbf{f}_I$, $\mathbf{f}_L$, $\mathbf{f}_R$ na posuvech pro všechny sektory stejná a dokonce (dle principu akce a reakce)

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_{j+1}) = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_{j+1}) . \quad (3.2)$$

Různé posuvy ovšem mohou znamenat různé hodnoty těchto sil. Poznamenejme ještě, že bychom mohli uvažovat i obecnější případ, kdy uvedené síly závisí rovněž na rychlostech posuvu.

Pro index j označující konkrétní sektor předpokládáme, že jeho hodnota $j + 1 = N + 1$ rovněž označuje první (referenční) sektor a hodnota $j - 1 = 0$ pak poslední N -tý sektor.

Rovnice (3.1) reprezentuje N maticových rovnic. Budeme předpokládat, že periodické budící síly $\mathbf{p}_j$ jsou stejné na každém sektoru a že se liší pouze pevným fázovým posuvem Δt mezi sousedními sektory, tj. že

$$\mathbf{p}_j(t) = \mathbf{p}(t + (j - 1)\Delta t) . \quad (3.3)$$

Zde $\mathbf{p}(t)$ značí budící síly působící na referenční (první) sektor v čase t . Dále $\Delta t = \pm T/N$, kde T je perioda změny sil nebo $\Delta t = 0$, jestliže se síly působící na jednotlivé sektory neliší. Znaménko značí směr pohybu zátěžové vlny olopatkovaným diskem.

Z uvedeného předpokladu periodicity budících sil ovšem vzhledem k cyklické symetrii celé struktury vyplývá i periodicitu posuvů. Tu je možné formálně vyjádřit vztahem

$$\mathbf{q}_j(t) = \mathbf{q}(t + (j - 1)\Delta t) . \quad (3.4)$$

Připomeme si, že tyto posuvy jsou vyjádřeny v již zmíněném cylindrickém souřadném systému.

Pomocí (3.3) a (3.4) můžeme soustavu N maticových rovnic (3.1) psát ve tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t_j) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t_j) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t_j) + \mathbf{f}_I(\mathbf{q}(t_j)) + \mathbf{f}_L(\mathbf{q}(t_j - \Delta t), \mathbf{q}(t_j)) + \mathbf{f}_R(\mathbf{q}(t_j), \mathbf{q}(t_j + \Delta t)) = \mathbf{p}(t_j) \quad (3.5)$$

s $t_j = t + (j - 1)\Delta t$, $j = 1, \dots, N$. Protože index j nyní ukazuje pouze fázový posuv pro neznámý vektor posuvů $\mathbf{q}$, představuje (3.5) ve skutečnosti pouze jednu maticovou rovnici pro referenční sektor. Posuvy v j -tém sektoru pak stanovíme dle (3.4).

Dále vzhledem k (3.5) a (3.2) můžeme napsat nový vztah mezi silovým působením od levého a pravého sousedního sektoru ve tvaru

$$\mathbf{f}_R(t) = \mathbf{f}_L(t + \Delta t) , \quad (3.6)$$

který vyjadřuje jejich fázový posuv.

3.3 Typy zatěžovacích sil

Podmínka (3.3) kladená na budící síly je spolu s požadavkem cyklické symetrie jedinou, která musí být splněna, abychom mohli použít metodu navrženou v předchozím odstavci. Typy budících sil můžeme rozdělit do dvou skupin.

3.3.1 Buzení typu cestující vlny (Travelling Wave)

Pro rotující olopatkované disky je typické buzení aerodynamickými i jinými silami. Ty se mění (cestují) relativně vzhledem k disku. Např. proudění vycházející z rozváděcího lopatkového kola statoru nemusí dostatečně vykazovat cyklickou symetrii.

Nechť r, z, φ značí cylindrické souřadnice (radiální, axiální, obvodovou) souřadného systému, který je pevně spojen s diskem a tedy rotuje. Axiální osa je osou rotace. Rozložení a “cestování” budících sil po olopatkovaném disku pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$p = p(r, z, \varphi \pm \omega t) . \quad (3.7)$$

Znaménko $-$ odpovídá “dopředu cestující” vlně (forward travelling wave) a znaménko $+$ zpětné vlně (backward travelling wave). Tento typ síly splňuje podmínku (3.3). Rozvojem do Fourierovy řady podle proměnné φ rozložíme uvažované silové působení do jednotlivých harmonických složek, které korespondují s počtem tzv. uzlových průměrů.

Úhlová rotační rychlost ω určuje periodu buzení $T = 2\pi/\omega$. Pro uvažovaný fázový posuv pak máme $\Delta t = \pm T/N = \pm \frac{2\pi}{N\omega}$.

3.3.2 Buzení prostorově stacionární

Tento typ buzení je charakteristický pro analýzu vibrací olopatkovaného disku, který nerotuje. To je případ “statických” zkoušek. V některých případech se ovšem může vyskytnout rovněž u rotujícího disku. Tento typ buzení můžeme vyjádřit ve tvaru

$$p = p_s(r, z, \varphi) p_t(t) , \quad (3.8)$$

kde $p_t(t)$ je periodická funkce vzhledem k času t . Budeme dále v takovém případě předpokládat, že

$$p_s(r, z, \varphi) = p_s(r, z, \varphi + T_\varphi) \quad \text{s } T_\varphi = \frac{2\pi}{N} . \quad (3.9)$$

Kapitola 4

Sektorový model s multiharmonickou formulací

4.1 Multiharmonický rozvoj posuvů

Jestliže budící síly působící na olopatkovaný disk jsou periodické, je žádoucí nalézt ustálený stav, periodické režimy příslušné odezvy. Celkovou periodickou odezvu vibrací můžeme reprezentovat omezenou Fourierovou řadou, která by měla obsahovat tolik harmonických složek, kolik je jich potřeba k dostatečné aproximaci řešení. Tedy předpokládejme, že

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^n (\mathbf{Q}_k^c \cos(k\omega t) + \mathbf{Q}_k^s \sin(k\omega t)) . \quad (4.1)$$

Zde $\mathbf{Q}_k^c$ a $\mathbf{Q}_k^s$ ($k=1, \dots, n$) jsou vektory harmonických koeficientů příslušející kosinovým a sinovým komponentám. $\mathbf{Q}_0$ je vektor konstantní komponenty posuvů.

Vztah (4.1) můžeme přepsat do kompaktnějšího tvaru

$$\mathbf{q}(t) = (\mathbf{H}^T(\tau) \otimes \mathbf{I}) \mathbf{Q} . \quad (4.2)$$

Zde značí

$\tau = \omega t$ bezdimenzionální čas,

$\mathbf{H}^T = \{1, \cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \dots, \cos(n\tau), \sin(n\tau)\}$ vektor harmonických funkcí,

$\mathbf{I}$ jednotkovou matici řádu $N_q \times N_q$, kde N_q je počet stupňů volnosti uvažovaného sektoru,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1^c \\ \mathbf{Q}_1^s \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n^c \\ \mathbf{Q}_n^s \end{array} \right\} \quad \text{celkový vektor řádu } N_q(2n+1) \text{ všech harmonických koeficientů} . \quad (4.3)$$

Symbol $\otimes$ značí Kroneckerův maticový součin (viz odstavec ?? dodatku). Tedy

$$\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{I} = [\mathbf{I}, \cos \tau \mathbf{I}, \sin \tau \mathbf{I}, \dots, \cos(n\tau) \mathbf{I}, \sin(n\tau) \mathbf{I}] \quad (4.4)$$

je obdélníková matice řádu $N_q \times (2n+1)N_q$.

4.2 Formulace založená na užití konečných prvků

Abychom od rovnice (3.5), která vyjadřuje kmitání v časové oblasti, přešli k formulaci ve "frekvenční oblasti", dosadíme v souladu s multiharmonickou metodou bilance (the multi-harmonic balance method) do rovnice (3.5) tvar řešení (4.1) a provedeme následné úpravy. Především postupně vynásobíme nový vztah funkcemi $\cos(k\omega t)$ a $\sin(k\omega t)$, přičemž každý z těchto vztahů integrujeme přes celou periodu T . Protože

$$\int_0^T \cos(k\frac{2\pi}{T}t) \cos(m\frac{2\pi}{T}t) dt = \int_0^T \sin(k\frac{2\pi}{T}t) \sin(m\frac{2\pi}{T}t) dt = \frac{T}{2} \delta_{km}, \quad k, m \geq 1,$$

a

$$\int_0^T \sin(k\frac{2\pi}{T}t) \cos(m\frac{2\pi}{T}t) dt = 0, \quad k, m \geq 1,$$

obdržíme

$$\mathbf{Z}(\omega) \mathbf{Q} + \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{P}, \quad (4.5)$$

kde

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_0(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{F}_1^c(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{F}_1^s(\mathbf{Q}) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^c(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{F}_n^s(\mathbf{Q}) \end{array} \right\} \text{ je vektor harmonických komponent nelineárních sil }, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1^c \\ \mathbf{P}_1^s \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n^c \\ \mathbf{P}_n^s \end{array} \right\} \text{ je vektor harmonických komponent budících sil }, \quad (4.7)$$

a

$$\mathbf{Z} = \text{diag}[\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n] \quad (4.8)$$

je matice dynamické tuhosti lineární části systému tvořená všemi harmonickými komponentami. Tedy

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{K} \quad \text{a} \quad \mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & k\omega \mathbf{C} \\ -k\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \text{ pro } k = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Dále (pro jednoduchost vnitřní nelineární síly $\mathbf{f}_l$ již neuvažujeme)

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{Q}) = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \mathbf{f}_L(\mathbf{q}(t - T/N), \mathbf{q}(t)) dt + \int_0^T \mathbf{f}_R(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t + T/N)) dt \right] \quad (4.10)$$

a pro $k \geq 1$

$$\mathbf{F}_k^c(\mathbf{Q}) = \frac{2}{T} \left[\int_0^T \cos(k\omega t) \mathbf{f}_L(\mathbf{q}(t - T/N), \mathbf{q}(t)) dt + \int_0^T \cos(k\omega t) \mathbf{f}_R(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t + T/N)) dt \right], \quad (4.11)$$

$$\mathbf{F}_k^s(\mathbf{Q}) = \frac{2}{T} \left[\int_0^T \sin(k\omega t) \mathbf{f}_L(\mathbf{q}(t - T/N), \mathbf{q}(t)) dt + \int_0^T \sin(k\omega t) \mathbf{f}_R(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t + T/N)) dt \right]. \quad (4.12)$$

Obdobně

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{p}(t) dt, \quad \mathbf{P}_k^c = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \mathbf{p}(t) dt, \quad \mathbf{P}_k^s = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \mathbf{p}(t) dt. \quad (4.13)$$

Připomeňme si, že rovnice (4.5) je nelineární vzhledem k harmonickým komponentám posuvů $\mathbf{Q}$.

4.3 Popis rozdělení sektoru na vnitřek a části hranice

Vzhledem k cyklické symetrii je vhodné rozdělit vektor posuvu sektorů do tří vektorů:

- (i) vektor posuvů $\mathbf{q}_L$ v uzlech levé hranice sektoru,
- (ii) vektor posuvů $\mathbf{q}_I$ ve vnitřních uzlech sektoru,
- (iii) vektor posuvů $\mathbf{q}_R$ v uzlech pravé hranice sektoru.

Vazební podmínku mezi posuvy v levých a pravých hraničních uzlech pak obdržíme užitím vztahu (3.4)

$$\mathbf{q}_R(t) = \mathbf{q}_L(t + \alpha/\omega), \quad (4.14)$$

kde $\alpha = 0$ pro prostorově stacionární buzení (nebo $\alpha = \pm 2\pi/N$ pro buzení typu běžící vlny a znaménko + nebo - se vybere podle směru rotace budících sil v (3.3)).

V souladu s (4.1) rovněž provedeme rozklad harmonických koeficientů na složky $\mathbf{Q}_R$, $\mathbf{Q}_I$, $\mathbf{Q}_L$, tedy ($\tau = \omega t$)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R(t) &= \mathbf{Q}_{R0} + \sum_{k=1}^n (\mathbf{Q}_{Rk}^c \cos(k\tau) + \mathbf{Q}_{Rk}^s \sin(k\tau)) , \\ \mathbf{q}_L(t) &= \mathbf{Q}_{L0} + \sum_{k=1}^n (\mathbf{Q}_{Lk}^c \cos(k\tau) + \mathbf{Q}_{Lk}^s \sin(k\tau)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

a dále

$$\mathbf{Q}_R = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{R0} \\ \mathbf{Q}_{R1}^c \\ \mathbf{Q}_{R1}^s \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{Rn}^c \\ \mathbf{Q}_{Rn}^s \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_L = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{L0} \\ \mathbf{Q}_{L1}^c \\ \mathbf{Q}_{L1}^s \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{Ln}^c \\ \mathbf{Q}_{Ln}^s \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Vztah (4.14) pak můžeme přepsat do tvaru (s využitím (4.2))

$$(\mathbf{H}^T(\tau) \otimes \mathbf{I}) \mathbf{Q}_R = (\mathbf{H}^T(\tau + \alpha) \otimes \mathbf{I}) \mathbf{Q}_L, \quad (4.17)$$

kde tentokrát jednotková matice $\mathbf{I}$ má počet řádků a sloupců roven počtu neznámých (stupňů volnosti) vektorů $\mathbf{Q}_{Rk}$, $\mathbf{Q}_{Lk}$. Pro vektory harmonických funkcí bez a s fázovým posuvem ovšem můžeme psát

$$\mathbf{H}(\tau + \alpha) = \mathbf{T}\mathbf{H}(\tau), \quad (4.18)$$

kde $\mathbf{T}$ je transformační matice, která má následující blokově diagonální tvar

$$\mathbf{T} = \text{diag}[t_0, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n] \quad (4.19)$$

s

$$t_0 = 1 \quad \text{a} \quad \mathbf{t}_k = \begin{bmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Je totiž

$$\begin{aligned} \cos k(\tau + \alpha) &= \cos k\alpha \cos k\tau - \sin k\alpha \sin k\tau, \\ \sin k(\tau + \alpha) &= \sin k\alpha \cos k\tau + \cos k\alpha \sin k\tau. \end{aligned}$$

Protože podle vztahu (??) dodatku jest

$$\mathbf{H}^T(\tau) \mathbf{T}^T \otimes \mathbf{I} = (\mathbf{H}^T(\tau) \otimes \mathbf{I})(\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{I}),$$

můžeme pravou stranu výrazu (4.17) upravit s pomocí (4.18) do tvaru

$$(\mathbf{H}^T(\tau + \alpha) \otimes \mathbf{I})\mathbf{Q}_L = (\mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{I})\mathbf{Q}_L = (\mathbf{H}^T(\tau) \otimes \mathbf{I})(\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{I})\mathbf{Q}_L,$$

a tedy (pro nějaký čas τ budou pro příslušné k hodnoty $\cos k\tau$ a $\sin k\tau$ nenulové)

$$\mathbf{Q}_R = (\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{I})\mathbf{Q}_L. \quad (4.20)$$

Pro k -té koeficienty multiharmonického rozvoje tak můžeme užitím (4.20) napsat vztah

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{Rk}^c \\ \mathbf{Q}_{Rk}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\alpha) \mathbf{I} & \sin(k\alpha) \mathbf{I} \\ -\sin(k\alpha) \mathbf{I} & \cos(k\alpha) \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{Lk}^c \\ \mathbf{Q}_{Lk}^s \end{Bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

Vektor koeficientů k -té harmoniky posuvů nyní můžeme psát pouze pomocí informace ve vnitřních uzlech sektoru a v uzlech jeho levé hranice

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{Lk}^c \\ \mathbf{Q}_{Ik}^c \\ \mathbf{Q}_{Rk}^c \\ \mathbf{Q}_{Lk}^s \\ \mathbf{Q}_{Ik}^s \\ \mathbf{Q}_{Rk}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cos(k\alpha) \mathbf{I} & \mathbf{0} & \sin(k\alpha) \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\sin(k\alpha) \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cos(k\alpha) \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{Lk}^c \\ \mathbf{Q}_{Ik}^c \\ \mathbf{Q}_{Lk}^s \\ \mathbf{Q}_{Ik}^s \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_k \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{Lk}^c \\ \mathbf{Q}_{Ik}^c \\ \mathbf{Q}_{Lk}^s \\ \mathbf{Q}_{Ik}^s \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_k \tilde{\mathbf{Q}}_k. \quad (4.22)$$

Matice $\mathbf{G}_k^{-L}$ inverzní zleva k matici $\mathbf{G}_k$ bude tvaru

$$\mathbf{G}_k^{-L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\cos(k\alpha)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\sin(k\alpha)\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\sin(k\alpha)\mathbf{I} & \frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\cos(k\alpha)\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

tj. $\mathbf{G}_k^{-L}\mathbf{G}_k = \mathbf{I}$ je identická matice příslušného řádu. Označme dále

$$\mathbf{G} = \text{diag}[\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n], \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \\ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_n \end{Bmatrix}, \quad \text{tj. } \mathbf{Q} = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (4.23)$$

Dále značme

$$\mathbf{G}^{-L} = \text{diag}[\mathbf{G}_0^{-L}, \mathbf{G}_1^{-L}, \dots, \mathbf{G}_n^{-L}], \quad \text{zřejmě } \mathbf{G}^{-L}\mathbf{G} = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{G}^{-L}\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (4.24)$$

Vektor budících sil $\mathbf{p}$ můžeme analogicky ke vztahu (4.2) vyjádřit pomocí celkového vektoru $\mathbf{P}$ všech jeho harmonických koeficientů. Pro vektory odpovídající levým, vnitřním a pravým uzlům sektoru pak bude opět plat vztah (4.22) s příslušnou záměnou symbolu $\mathbf{Q}$ za $\mathbf{P}$. (Pro buzení prostorově stacionární bude $\alpha = 0$ - případ software NOMUVIBLAD-ESS1).

Kapitola 5

Komplexní aritmetika a užití matic funkce frekvenční odezvy

5.1 Formulace užívající cyklické symetrie

Cyklickou symetrii nyní využijeme tak, že v rovnici (4.5) uplatníme vztah (4.23). Obdržíme

$$\mathbf{E}^{FE}(\mathbf{Q}) = \tilde{\mathbf{Z}}(\omega)\tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{Q}}) - \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0} , \quad (5.1)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}(\omega) &= \mathbf{G}^T \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{G} , \\ \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{Q}}) &= \mathbf{G}^T \mathbf{F}(\mathbf{G}\tilde{\mathbf{Q}}) , \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{G}^T \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}} , \mathbf{P} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{P}} , \end{aligned} \quad (5.2)$$

matice $\mathbf{G}$ je definována vztahem (4.23) a (4.22).

Poznámka. Zde není úplná konsistence značení $\tilde{\mathbf{P}}$, neboť $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{G}^{-L}\mathbf{Q}$ a $\mathbf{G}^{-L} \neq \mathbf{G}^T$. Ve vztazích (5.2) by jistě šlo psát místo $\mathbf{G}^T$ rovnou $\mathbf{G}^{-L}$, ale při následné implementaci algoritmu by to přineslo spíše obtíže. Navíc matice $\tilde{\mathbf{Z}}(\omega)$ by pak byla nesymetrická.

Rovnice (5.1) reprezentuje nelineární soustavu rovnic vzhledem k vektoru posuvů $\tilde{\mathbf{Q}}$, což popisuje přesně vibrace celého olopatkovaného disku užitím modelu konečných prvků pouze pro jeden sektor.

5.2 Formulace vyjádřená pomocí aritmetiky komplexních čísel

Výpočet vektoru reziduí $\mathbf{E}(\mathbf{Q})$ ze vztahu (5.1) může být efektivně proveden využitím speciální struktury matice $\mathbf{Z}$ a využitím aritmetiky komplexních čísel. Zavedme proto komplexní vektory pro každou k -tou harmoniku posuvů $\mathbf{Q}_k$, nelineárních sil $\mathbf{F}_k$ a budících sil $\mathbf{P}_k$ následovně

$$\mathcal{Q}_k = \mathbf{Q}_k^c + j\mathbf{Q}_k^s , \quad \mathcal{P}_k = \mathbf{P}_k^c + j\mathbf{P}_k^s , \quad \mathcal{F}_k = \mathbf{F}_k^c + j\mathbf{F}_k^s , \quad (5.3)$$

kde $j = \sqrt{-1}$ značí imaginární jednotku. Komplexní veličiny značíme odlišným kaligrafickým fontem, i když netučným. Matici komplexní dynamické tuhosti $\mathcal{Z}_k$ pro k -tou harmoniku definujeme pak vztahem

$$\mathcal{Z}_k = [\mathbf{K} - (k\omega^2)\mathbf{M}] - j k\omega\mathbf{C} . \quad (5.4)$$

Pro k -tou komponentu rovnice (4.5) tedy můžeme psát

$$\mathcal{Z}_k \mathcal{Q}_k + \mathcal{F}_k(\mathbf{Q}) = \mathcal{P}_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

Připomeňme, že vektor k -té harmoniky nelineárních sil $\mathcal{F}_k(\mathbf{Q})$ závisí (obecně) na všech multiharmonických komponentách posuvů $\mathbf{Q}$ a že tyto komponenty posuvů jsou uvažovanými silami provázány (tj. ovlivňují se navzájem).

Vztah (4.22) pro posuvy sektoru vyjádřené pouze pomocí posuvů ve vnitřních uzlech a v uzlech levé části hranice tohoto sektoru můžeme dále přepsat do tvaru

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{Q}_{Lk} \\ \mathcal{Q}_{Ik} \\ \mathcal{Q}_{Rk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ e^{-j k \alpha} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{Q}_{Lk} \\ \mathcal{Q}_{Ik} \end{Bmatrix} = \mathcal{G}_k \begin{Bmatrix} \mathcal{Q}_{Lk} \\ \mathcal{Q}_{Ik} \end{Bmatrix}. \quad (5.6)$$

Matice $\mathcal{G}_k$ této transformace umožňuje přepsat rovnici (5.5) (a tedy i (5.1)) pro k -tou složku do tvaru

$$\mathcal{E}_k^{FE}(\tilde{\mathcal{Q}}) = \tilde{\mathcal{Z}}_k \tilde{\mathcal{Q}}_k + \tilde{\mathcal{F}}_k(\tilde{\mathbf{Q}}) - \tilde{\mathcal{P}}_k = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}_k &= \mathcal{G}_k^* \mathcal{Z}_k \mathcal{G}_k, \\ \tilde{\mathcal{F}}_k(\tilde{\mathbf{Q}}) &= \mathcal{G}_k^* \mathcal{F}_k(\mathbf{G} \tilde{\mathbf{Q}}), \\ \tilde{\mathcal{P}}_k &= \mathcal{G}_k^* \mathcal{P}_k, \end{aligned} \quad (5.8)$$

hvězdička $*$ označuje matici Hermitovsky konjugovanou (tj. transponovanou s konjugovanými komplexními čísly).

5.3 Multiharmonická formulace užívající FRF matice

V mnoha praktických případech je formulace založená na užití dynamické poddajnosti nebo matic FRF (frequency response function - funkce frekvenční odezvy) mnohem efektivnější než formulace, která využívá metody konečných prvků. Mezi tyto případy můžeme počítat i olopatkovaný disk s nelineárními vazbami, jestliže vlastní tvary a frekvence linearizované úlohy máme napočteny konvenčním FE softwarem.

Multiharmonická formulace využívající sektorové matice FRF může být provedena pomocí komplexní aritmetiky. Matice $\tilde{\mathcal{Z}}_k(k\omega)$ dynamické tuhosti sektoru k -té harmoniky nezávisí na amplitudě vibrací. Rovnici (5.7) proto můžeme přenásobit její inverzní maticí $\tilde{\mathcal{A}}_k = \tilde{\mathcal{Z}}_k^{-1}(k\omega)$, což je sektorová FRF matice pro k -tou harmoniku multiharmonického rozvoje. Obdržíme

$$\mathcal{E}_k^{FRF}(\tilde{\mathbf{Q}}) = \tilde{\mathcal{Q}}_k + \tilde{\mathcal{A}}_k(\tilde{\mathcal{F}}_k(\tilde{\mathbf{Q}}) - \tilde{\mathcal{P}}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (5.9)$$

Sektorová matice $\tilde{\mathcal{A}}_k$ se užívá v analýze lineárních vibrací olopatkovaných disků. Můžeme ji získat přímo inverzí matice $\tilde{\mathcal{Z}}_k$. Pro struktury s vysokým počtem stupňů volnosti je ovšem takovýto výpočet FRF matice velmi náročný. Proto v následujících odstavcích 5.3.1. až 5.3.3 se budeme zabývat dvěma speciálními technikami.

5.3.1 Vyloučení lineárních stupňů volnosti z nelineárních rovnic

Počet stupňů volnosti modelu olopatkovaného disku, ve kterých působí nelineární síly, je mnohem nižší, než počet všech stupňů volnosti. Užití FRF matice umožňuje snadno vyloučit “lineární stupně volnosti”, a to bez jakékoliv ztráty přesnosti nebo úplnosti modelu. Výsledkem je rovnice zformulovaná pouze pro stupně volnosti, ve kterých působí nelineární síly.

Exponenty nl a ln rozlišme dále části užívaných vektorů, které se vztahují k nelineárním a lineárním stupňům volnosti. Tedy

$$\tilde{\mathbf{Q}}_k = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_k^{ln} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_k^{nl} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_k(\tilde{\mathbf{Q}}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathcal{F}}_k^{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nl}) \end{Bmatrix}, \quad (5.10)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{nl} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_0^{nl} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_1^{nl} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_n^{nl} \end{Bmatrix}.$$

Podobně uvažujme komplexní matici

$$\tilde{\mathcal{A}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_k^{ln} & \tilde{\mathcal{B}}_k \\ \tilde{\mathcal{B}}_k^H & \tilde{\mathcal{A}}_k^{nl} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_k^{ln} & \text{ je komplexní matice řádu } N_{ln} \times N_{ln}, \\ \tilde{\mathcal{A}}_k^{nl} & \text{ je komplexní matice řádu } N_{nl} \times N_{nl}, \\ \tilde{\mathcal{B}}_k & \text{ je komplexní matice řádu } N_{ln} \times N_{nl}, \end{aligned}$$

N_{ln} značí počet lineárních a N_{nl} počet nelineárních stupňů volnosti. Rovnici (5.9) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\mathcal{E}_k^{FRF}(\tilde{\mathbf{Q}}) = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_k^{ln} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_k^{nl} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{B}}_k \tilde{\mathcal{F}}_k^{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nl}) \\ \tilde{\mathcal{A}}_k^{nl} \tilde{\mathcal{F}}_k^{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nl}) \end{Bmatrix} - \tilde{\mathcal{A}}_k \tilde{\mathcal{P}}_k = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Vidíme, že v řádcích pro nelineární stupně volnosti se již nevyskytují neznámé lineární stupně volnosti. Tedy můžeme samostatně řešit nelineární soustavu rovnic

$$\left(\mathcal{E}_k^{FRF}(\tilde{\mathbf{Q}}) \right)^{nl} = \tilde{\mathbf{Q}}_k^{nl} + \tilde{\mathcal{A}}_k^{nl} \tilde{\mathcal{F}}_k^{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nl}) - \left(\tilde{\mathcal{A}}_k \tilde{\mathcal{P}}_k \right)^{nl} = \mathbf{0}, \quad (5.13)$$

jejíž řešením bude (komplexní) vektor $\tilde{\mathbf{Q}}_k^{nl}$ a znalost vektoru nelineárních sil $\tilde{\mathcal{F}}_k^{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nl})$. Lineární část $\tilde{\mathbf{Q}}_k^{ln}$ komplexního vektoru k -té harmoniky posuvů pak vypočteme přímo ze vztahu

$$\tilde{\mathbf{Q}}_k^{ln} = \left(\tilde{\mathcal{A}}_k \tilde{\mathcal{P}}_k \right)^{ln} - \tilde{\mathcal{B}}_k \tilde{\mathcal{F}}_k^{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}^{nl}). \quad (5.14)$$

5.3.2 Výpočet sektorové matice FRF

Indexem k ukazujeme na k -tou harmoniku posuvů rotačně symetrické struktury. Značme $\omega_{r,k}$ r -tou vlastní frekvenci příslušné lineární struktury bez nelineárních vazeb a ϕ_r odpovídající r -tý vlastní vektor. Sektorovou FRF matici pak můžeme vyjádřit následovně

$$\tilde{\mathcal{A}}_k = \tilde{\mathcal{Z}}_k^{-1}(k\omega) \simeq \sum_{r=1}^N \frac{1}{(1 - j\eta_r)\omega_r^2 - (k\omega)^2} \phi_r \phi_r^*. \quad (5.15)$$

Zde

- ω je budící frekvence,
- η_r je koeficient tlumení příslušející r -tému vlastnímu tvaru
- N je počet tvarů užitých v modálním rozvoji,
- ϕ_r^* je "řádkový vektor" hermitovsky sdružený k vektoru ϕ_r .

Počet vlastních tvarů N , které poskytují dostatečnou přesnost pro výpočet FRF matice, je velmi malý ve srovnání s počtem stupňů volnosti modelovaného sektoru.

Je potřeba poznamenat, že vztah (5.15) je přesný v případě, když suma obsahuje všechny vlastní tvary příslušné všem uzlovým průměrům a když matice tlumení $\tilde{\mathbf{C}}$ reprezentuje proporcionální tlumení (tj. když může být vyjádřena jako lineární kombinace matice tuhosti a hmotnosti).

Poznámka. Matici $\tilde{\mathbf{C}}_k$ reprezentující proporcionální tlumení můžeme psát ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{C}}_k = \frac{1}{k\omega} \mu_1 \tilde{\mathbf{K}} + \mu_2 \tilde{\mathbf{K}} + \mu_3 \tilde{\mathbf{M}}, \quad (5.16)$$

kde první člen popisuje strukturální, hysterezní tlumení, další dva členy odpovídají viskoznímu tlumení. Ztrátový faktor modálního tlumení pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\eta_{r,k} = \mu_1 + k\omega (\mu_2 + \mu_3/\omega_r^2). \quad (5.17)$$

Rozvoj (5.15) může být dokonce dostatečně přesný v mnoha praktických případech s neproportionálním tlumením, jestliže lineární tlumení popsané maticí $\mathbf{C}_k$ je dostatečně malé a jestliže je malá i interakce mezi různými módy způsobená tlumením.

5.3.3 Člen s vektorem budících sil

Člen $(\tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\mathbf{P}}_k)^{nl}$, který se vyskytuje v rovnici (5.13), můžeme efektivně počítat následujícím způsobem

$$(\tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\mathbf{P}}_k)^{nl} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r^* \tilde{\mathbf{P}}_k}{(1 - j\eta_{r,k})\omega_r^2 - (k\omega)^2} (\phi_r)^{nl}. \quad (5.18)$$

Skalární součin $\phi_r^* \tilde{\mathbf{P}}_k$ řádkového a sloupcového vektoru je nutné provést pouze jednou. Nelineární části $(\phi_r)^{nl}$ vlastních tvarů jsou "krátké" a jejich přenásobení komplexním číslem proto není příliš výpočetně náročné.

Kapitola 6

Řešení nelineárních rovnic

6.1 Nelineární rovnice ve formulaci pomocí reálné aritmetiky

Jedna z nejúčinnějších metod řešení algebraických nelineárních rovnic je Newtonova-Raphsonova metoda s kvadratickou konvergencí, jestliže příslušná aproximace je dostatečně blízká řešení. Příslušný iterativní proces vyjádříme předpisem

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(m+1)} = \tilde{\mathbf{Q}}^{(m)} - \mathbf{R}_m^{-1} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)}) , \quad (6.1)$$

kde horní index $^{(m)}$ označuje číslo právě počítané iterace. Matice $\mathbf{R}_m$ je tvaru

$$\mathbf{R}_m = \frac{\partial \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} , \quad (6.2)$$

$\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})$ značí vektor reziduí a může být počítán jak z FE, tak z FRF formulace.

Inverzní matici $\mathbf{R}_m^{-1}$ ovšem není potřebné počítat, neboť vektor $\mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{R}_m^{-1} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})$ lze získat řešením soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{R}_m \mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)}) . \quad (6.3)$$

Ta obsahuje pouze malý počet rovnic, neboť předpis (6.1) stačí aplikovat jen na nelineární stupně volnosti.

V případě FE modelu (5.1) ovšem bude

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{FE}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} = \tilde{\mathbf{Z}}(\omega) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} = \tilde{\mathbf{Z}}(\omega) + \tilde{\mathbf{K}}^{nln}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)}) , \quad (6.4)$$

kde $\tilde{\mathbf{K}}^{nln}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})$ reprezentuje tzv. “tangenciální” matici tuhosti popisující vlastnosti tuhosti rozhraní s nelineárním kontaktem. Účinná metoda s analytickým odvozením pro matici $\tilde{\mathbf{K}}^{nln}(\tilde{\mathbf{Q}}^{(m)})$ byla publikována např. v [3], [4].

6.2 Nelineární rovnice ve formulaci pomocí komplexní aritmetiky

V případě nelineárních rovnic např. (5.13) je přímá aplikace Newtonovy-Raphsonovy metody problematická. Důvod je ten, že vektor reziduí $\mathcal{E}_k$ nemusí být analytickou funkcí komplexního

vektoru posuvů $\tilde{Q}_k$ a tedy příslušná derivace $\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial \tilde{Q}_k}$ nemusí být definována. Musíme proto uvažovat zpětný rozklad do reálných čísel.

Uvažujme dále rovnici (5.13) a její vektor reziduí. Pro jednoduchost zápisu dále vynecháme označení ^{nln} nelineárních stupňů volnosti. Vektor reálných reziduí $\mathbf{E}$ počítejme ve tvaru

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \text{Re}(\mathcal{E}_1) \\ \text{Im}(\mathcal{E}_1) \\ \vdots \\ \text{Im}(\mathcal{E}_n) \end{pmatrix}.$$

Matici $\mathbf{R}_m$ derivací reziduí z (6.2), kde vektor reziduí je dán vztahem (5.13), pak vypočteme následovně

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{FRF}}{\partial \tilde{\mathbf{Q}}} = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \text{Re}(\mathbf{D}_{01}) & \text{Im}(\mathbf{D}_{02}) & \dots & \text{Im}(\mathbf{D}_{0,2m}) \\ \text{Re}(\mathbf{D}_{10}) & \text{Re}(\mathbf{D}_{11}) & \text{Re}(\mathbf{D}_{12}) & \dots & \text{Re}(\mathbf{D}_{1,2m}) \\ \text{Im}(\mathbf{D}_{10}) & \text{Im}(\mathbf{D}_{11}) & \text{Im}(\mathbf{D}_{12}) & \dots & \text{Im}(\mathbf{D}_{1,2m}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Re}(\mathbf{D}_{n0}) & \text{Re}(\mathbf{D}_{n1}) & \text{Re}(\mathbf{D}_{n2}) & \dots & \text{Re}(\mathbf{D}_{n,2m}) \\ \text{Im}(\mathbf{D}_{n0}) & \text{Im}(\mathbf{D}_{n1}) & \text{Im}(\mathbf{D}_{n2}) & \dots & \text{Im}(\mathbf{D}_{n,2m}) \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

kde

$$\mathbf{D}_{k0} = \tilde{\mathcal{A}}_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_k}{\partial \mathbf{Q}_0}, \quad \mathbf{D}_{k,2i-1} = \tilde{\mathcal{A}}_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_k}{\partial \mathbf{Q}_i^c}, \quad \mathbf{D}_{k,2i} = \tilde{\mathcal{A}}_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_k}{\partial \mathbf{Q}_i^s}, \quad k = 0, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n.$$

V prvním blokovém řádku matice (6.5) se střídají reálné a imaginární části matic D_{0i} . Další řádky bloků však již obsahují pouze reálné nebo pouze imaginární části matic D_{ki} .

Kapitola 7

Element modelující nelineární vazbu - kontakt se třením

Aplikace tohoto “prvku” spočívá v tom, že dokážeme z relativních posuvů uzlů protilehlých třecích ploch kontaktu počítat příslušné působící síly.

7.1 Značení

$\tau = \omega t$	bezrozměrný čas
x	relativní posuv v tečném směru kontaktu
y	relativní posuv v normálovém směru kontaktu
$\mathbf{X}$	vektor harmonických koeficientů relativního posuvu v tečném směru
$\mathbf{Y}$	vektor harmonických koeficientů relativního posuvu v normálovém směru
$\mathbf{H}_-$	vektor harmonických funkcí $\mathbf{H}_- = \{1, \cos(\tau), \sin(\tau), \dots, \cos(n\tau), \sin(n\tau)\}^T$
$\mathbf{H}_+$	vektor harmonických funkcí $\mathbf{H}_+ = \{1/2, \cos(\tau), \sin(\tau), \dots, \cos(n\tau), \sin(n\tau)\}^T$
f_x	síla přenášená kontaktem v tečném směru
f_y	síla přenášená kontaktem v normálovém směru
μ	koeficient tření
N_0	nominální normálová síla předepnutí kontaktu
k_x	koeficient modelované tuhosti kontaktu v tečném směru
k_y	koeficient modelované tuhosti kontaktu v normálovém směru
τ_j	okamžiky přechodu prokluz-ulpění (slip-stick) nebo kontakt-rozevření (contact-separation)
$\mathbf{F}_x$	vektor harmonických koeficientů pro tečnou sílu
$\mathbf{F}_y$	vektor harmonických koeficientů pro normálovou sílu

7.2 Modelování nelineárních kontaktních sil

Relativní posuvy kontaktních ploch budeme uvažovat ve tvaru

$$x(\tau) = \mathbf{H}_-^T(\tau)\mathbf{X}, \quad y(\tau) = \mathbf{H}_-^T(\tau)\mathbf{Y}.$$

Vektory harmonických koeficientů relativních posuvů $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou určeny vektorem $\mathbf{Q}$ (po výběru stupňů volnosti uzlů kontaktu a transformací do lokálního souřadného systému kontaktu, přičemž směr x by měl souhlasit se směrem prokluzu. Pakliže dominantní směr prokluzu neexistuje a relativní posuv protilehlých uzlů je obecně prostorový, pak je potřeba kontakt modelovat dvěma těmito elementy.)

Mezi kontaktními plochami dále budeme uvažovat suché tření s tím, že může dojít jak k jeho “slepení”, tak k prokluzu a oddělení. Časy (bezrozměrné) přechodů mezi těmito stavy značíme τ_j a jejich výpočet je popsán v [3]. Vztah mezi relativními posuvy a přenášenými silami je modelován následovně:

Tangenciální síla

$$f_x(\tau) = \begin{cases} f_x^0 + k_x(x(\tau) - x_0) & \text{přilnutí (stick)} \\ \xi\mu f_y(\tau) & \text{proklouznutí (slip)} \\ 0 & \text{oddělení (separation)} \end{cases} \quad (7.1)$$

Normálová síla

$$f_y(\tau) = \begin{cases} N_0 + k_y y & \text{kontakt (contact)} \\ 0 & \text{oddělení (separation)} \end{cases} \quad (7.2)$$

kde $\xi = \text{sgn}(\dot{x}(\tau)) = \pm$ značí znaménko směru síly při prokluzu. Dále f_x^0 a x_0 jsou hodnoty třecí síly a relativního tečného posuvu v okamžiku počátku prokluzu. (Jejich výpočet je popsán opět v [3]).

7.3 Vektory harmonických koeficientů kontaktních sil

Jak již bylo uvedeno ve značení, τ_j jsou okamžiky změny stavu kontaktu (např. mezi přilnutím a prokluzem) a jsou všechny obsaženy ve sledovaném intervalu jedné periody bezrozměrného času. Délka intervalu periody je 2π . Vektory Fourierových koeficientů pak napočteme dle vzorce

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_+(\tau) f_x \\ \mathbf{H}_-(\tau) f_y \end{Bmatrix} d\tau = \sum_{j=1}^n \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x^{(j)} \\ \mathbf{F}_y^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

přičemž

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x^{(j)} &= \begin{cases} k_x \mathbf{W}_j \mathbf{X} + c_j \mathbf{w}_j & \text{přilnutí (stick)} \\ \xi\mu(N_0 \mathbf{w}_j + k_y \mathbf{W}_j \mathbf{Y}) & \text{proklouznutí (slip)} \\ 0 & \text{oddělení (separation)} \end{cases}, \\ \mathbf{F}_y^{(j)} &= \begin{cases} N_0 \mathbf{w}_j + k_y \mathbf{W}_j \mathbf{Y} & \text{kontakt (contact)} \\ 0 & \text{oddělení (separation)} \end{cases}, \\ \mathbf{W}_j &= \frac{1}{\pi} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{H}_+(\tau) \mathbf{H}_-^T(\tau) d\tau, \quad \mathbf{w}_j = \frac{1}{\pi} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{H}_+(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$c_j = f_x^0(\tau_j) - k_x x(\tau_j).$$

Literatura

- [1] Petrov, E.P.: A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. ASME Journal of Turbomachinery 126(2004), 175-183.
- [2] Petrov, E.P.: Nonlinear vibrations of cyclically symmetric structures: Basic properties and a method for calculation. ECOOMAS 2004, P.Neittaanmaki, T.Rossi, K.Majava, and O.Pironneau (eds.), Jyvaskyla, 24-28 July 2004.
- [3] Petrov, E.P., and Ewins, D.: Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. ASME Paper GT-20002-30325, 2002.
- [4] Petrov, E.P., and Ewins, D.: Robust analysis of periodic vibration of structures with friction and gaps based on analytical derivation of nonlinear interface elements. Proceedings of 5th World Congress on Computational Mechanics, July 7-12, 2002, Vienna University of Technology.
- [5] Legrand, M., Pierre, C., Cartraud, P., and Lombard, J.-P.: Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. Journal of Sound and Vibration 319(1-2)(2009), 366-391.
- [6] Laxalde, D., Thouverez, F., Sinou, J.-J., Lombard, J.-P., and Baumhauer, S.: Mistuning identification and model updating of an industrial blisk. International Journal of Rotating Machinery (2007), doi:10.1155/2007/17289.
- [7] Panning, L., Sextro, W., and Popp, K.: Spatial dynamics of tuned and mistuned bladed disks with cylindrical and wedge-shaped friction dampers. International Journal of Rotating Machinery 9(3)(2003), 219-228.
- [8] Cen, Z., Li, J., and Lie, S.T.: Buckling analysis of rotationally periodic structures using shell element with relative degrees of freedom. Int. J. Num. Methods Eng. 51(2001), 1299-1315.
- [9] Massioni, P., and Verhaegen M.: Subspace identification of circulant systems. Automatica 44(2008), 2825-2833.
- [10] Panning, L.: Auslegung von Reibelelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaufeln. Dissertation, Universität Hannover, 2005.
- [11] Thomas, D.L.: Dynamics of rotationally periodic structures. Int. J. Numer. Methods Eng. 14(1979), 81-102.
- [12] Davis, P.J.: Circulant Matrices. Wiley-Interscience, 1979.

- [13] Laxalde, d., Lombard, J.-P., and Thouverez, F.: Dynamic of multi-stage bladed disks systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 129(4)(2007), 1058-1064.
- [14] Shen, I.Y.: Vibration of rotationally periodic structures. *Journal of Sound and Vibration* 174(4)(1994), 459-470.
- [15] Wu, G., Williams, F.W., and Kennedy, D.: Exact eigenvalue calculations for partially rotationally periodic structures. *Computers& Structures* 64(1-4)(1997), 275-284.
- [16] Bladh, J.R.: Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling. Dissertation, The University of Michigan, 2000.
- [17] Williams, F.W.: An algorithm for exact eigenvalue calculations for rotationally periodic structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 23 (1986), 609-622.
- [18] MacNeal, R.M., Harder, R.L., and Mason, J.B.: NASTRAN cyclic symmetry capability. *NASTRAN Users Experiences 3rd Colloq.*, Langley Research Centre, Hampton, Virginia, U.S.A., (1973) 395-421, NASA Tech. Memo. NASA TM X-2893.
- [19] Legrand, M., Roques, S., Pierre, C., Peseux, B., and Cartraud, P.: n-dimensional harmonic balance method extended to non-explicit nonlinearities. *Revue Européenne de Mécanique Numérique* 15(2206), 269-280.
- [20] Polach P.: Calculation of natural vibration of linear undamped rotationally periodic structures. *Engineering Mechanics* 15(2008), 81-95.
- [21] Krásný, I.: Numerical solution of rotationally periodic structures. *Acta Technica ČSAV* 27(1982), 634

8. Popis formátu vstupních souborů

Po spuštění programu je potřeba z klávesnice zadat jméno KMENOVÉHO SOUBORU, ve kterém jsou uvedena jména dalších potřebných vstupních souborů.

Formát KMENOVÉHO SOUBORU:

lopatka1020	! na první řádek se zadává jméno úlohy
C* vibrace olopatkovaneho disku	! řádky 2 až 4 obsahují komentář
C*17.8.2010	
C*	
62	! počet sektorů cyklické symetrie
20	! hodnota KK
1.e-3 1.E-4 1. 1.	! ERREPS EPS GAMA Dc
10 86. 89.75 0.25	! NHS O_MIN O_MAX O_KROK
1 0 15 0.05	! 1 0 N η
lopatka.cdb	! řádky 10 až 15 obsahují jména dalších
vazba.dat	! vstupních souborů; je nezbytné
Frekvence.dat	! zachovat jejich pořadí
Mode.dat	
prvni_tvar.dat	
buzeni_TORZE1.dat	
C* vystup	
3	! pocet uzlu pro vystup
10181 10142 24600	! uzly, v nemz se pozaduje vystup
2	! pocet pripadu pro vystup nelinearni vazby
1 87.	! cislo vazby, frekvence buzeni v Hz
1 89.	! cislo vazby, frekvence buzeni v Hz

KK – parametr pro dělení periody 2π (hodnota 20 je postačující)

ERREPS – hodnota chyby ukončující konvergenci při řešení nelineární soustavy

EPS – hodnota parametru ukončující konvergenci při výpočtu sil nelineární vazby

GAMA - parametr (doporučuje se 1.)

Dc – parametr (doporučuje se 1., v případě divergence pomáhá jeho snížení)

NHS – počet členů n multiharmonického rozvoje (vztah 4.1)

Postupně se počítají vibrace od budící frekvence $\omega=O_MIN$ po O_MAX s krokem O_KROK .

N – počet nenulových vlastních tvarů systému bez vazeb

η - koeficient tlumení

lopatka.cdb – název souboru s geometrií lopatky (ve formátu programu ANSYS)

vazba.dat - zadání nelineárních vazeb

Frekvence.dat - hodnoty nenulových vlastních frekvencí systému bez vazeb

Mode.dat - vlastní tvary (s nenulovými vlastními frekvencemi) systému bez vazeb

prvni_tvar.dat – případný vlastní tvar s nulovou vlastní frekvencí odpovídající volné rotaci olopatkovaneho disku

buzeni_TORZE1.dat – zadání budících sil

Formát souboru typu lopatka.cbd je formátem programu ANSYS. Soubor musí obsahovat následující typy řádků s počty uzlů, prvků a vazeb, se souřadnicemi uzlů, s prvkovými čísly a s čísly uzlů vazeb

```
NUMOFF,NODE, 25171
NUMOFF,ELEM, 97926
NUMOFF,MAT , 2 ! nemusí
NUMOFF,CEQN, 1572
NUMOFF,TYPE, 12 ! nemusí
```

```
NBLOCK,6,SOLID
(3i8,6e16.9)
  1  0  0 0.449058014 -2.910199930E-02 0.230845001
  2  0  0 0.399071991 -2.751700020E-02 0.230845001
  3  0  0 0.349101990 -2.549600030E-02 0.230845001
  4  0  0 0.299153015 -2.301300050E-02 0.230845001
  5  0  0 0.249229004 -2.006900020E-02 0.230845001
  6  0  0 0.199332993 -1.668799970E-02 0.230845001
  7  0  0 0.149464005 -1.291899970E-02 0.230845001
```

...

```
EBLOCK,19,SOLID, 97926
(19i8)
  1  1  1  1  0  0  0  0  8  0  1 2438 2606 2440 2440 2336 2336 2336 2336
  1  1  1  1  0  0  0  0  8  0  2 2258 1018 1011 1011 1024 1024 1024 1024
  1  1  1  1  0  0  0  0  8  0  3 2433 2578 2633 2633 2360 2360 2360 2360
```

...

```
CE,R5.0,DEFL, 3, 1, 0.00000000
CE,R5.0,NODE, 1,UX , -1.00000000 , 42,UX , 0.994869351
CE,R5.0,NODE, 42,UY , 0.101168215 ,
CE,R5.0,DEFL, 3, 2, 0.00000000
CE,R5.0,NODE, 1,UY , -1.00000000 , 42,UY , 0.994869351
CE,R5.0,NODE, 42,UX , -0.101168215 ,
CE,R5.0,DEFL, 2, 3, 0.00000000
CE,R5.0,NODE, 1,UZ , -1.00000000 , 42,UZ , 1.00000000
CE,R5.0,DEFL, 3, 4, 0.00000000
CE,R5.0,NODE, 2,UX , -1.00000000 , 41,UX , 0.994869351
CE,R5.0,NODE, 41,UY , 0.101168215 ,
CE,R5.0,DEFL, 3, 5, 0.00000000
CE,R5.0,NODE, 2,UY , -1.00000000 , 41,UY , 0.994869351
CE,R5.0,NODE, 41,UX , -0.101168215 ,
CE,R5.0,DEFL, 2, 6, 0.00000000
CE,R5.0,NODE, 2,UZ , -1.00000000 , 41,UZ , 1.00000000
CE,R5.0,DEFL, 3, 7, 0.00000000
```

...

Čtení se provádí pomocí následujících procedur (ve FORTRAN 90)

```
!*****
SUBROUTINE READ_1(NSNOD,NSELM,NCOUP)
!
IMPLICIT NONE
INTEGER NSNOD,NSELM,NCOUP,KK
CHARACTER*80 AAA
CHARACTER*12 BBB
```

```

KK=0
1  CONTINUE
READ(16,80)AAA
IF (AAA(1:12).EQ.'NUMOFF,NODE,')THEN
    WRITE(6,80)AAA
    BACKSPACE(16)
    READ(16,81)BBB,NSNOD
    WRITE(*,*)'pocet uzlu je ',NSNOD
    KK=KK+1
    IF (KK.EQ.3)RETURN
ENDIF
IF (AAA(1:12).EQ.'NUMOFF,ELEM,')THEN
    WRITE(6,80)AAA
    BACKSPACE(16)
    READ(16,81)BBB,NSELM
    WRITE(*,*)'pocet prvku je ',NSELM
    KK=KK+1
    IF (KK.EQ.3)RETURN
ENDIF
IF (AAA(1:12).EQ.'NUMOFF,CEQN,')THEN
    WRITE(6,80)AAA
    BACKSPACE(16)
    READ(16,81)BBB,NCOUP
    NCOUP=NCOUP/3
    WRITE(*,*)'pocet dvojic periodicity je ',NCOUP
    KK=KK+1
    IF (KK.EQ.3)RETURN
ENDIF
GOTO 1
80  FORMAT(A80)
81  FORMAT(A12,I8)
!
END
!
!*****
SUBROUTINE READ_2(NSNOD,NODE)
! cteni souradnic uzlu
IMPLICIT NONE
INTEGER NSNOD,K,I1,I2,I3
REAL  NODE(3,NSNOD),X,Y,Z
CHARACTER*80 AAA
!
80  FORMAT(A80)
11  FORMAT(3i8,6e16.9)
REWIND(16)
1  CONTINUE
READ(16,80,END=999)AAA
IF (AAA(1:7).NE.'NBLOCK,')GOTO 1
READ(16,*)
DO 2 K=1,NSNOD
    READ(16,11)I1,I2,I3,X,Y,Z
    IF (I1.NE.K)THEN
        WRITE(*,*)K,I1,' mezery v cislovani uzlu - procedura READ_2'
        PAUSE
    ENDIF
    NODE(1,K)=X
    NODE(2,K)=Y
    NODE(3,K)=Z
2  CONTINUE
    WRITE(6,*)' 1 ',NODE(1,1),NODE(2,1),NODE(3,1)
    WRITE(6,*)NSNOD,NODE(1,NSNOD),NODE(2,NSNOD),NODE(3,NSNOD)
    WRITE(6,*)'v procedure READ_2 byly nacteny uzly'
RETURN
999 WRITE(*,*)'v procedure READ_2 nebyly nacteny uzly'
    WRITE(6,*)'v procedure READ_2 nebyly nacteny uzly'
    STOP
END
!*****
SUBROUTINE READ_3(NSELM,ITETRA)
! cteni prvkovych cisel
IMPLICIT NONE
INTEGER NSELM,K,I1(19)
INTEGER ITETRA(4,NSELM)
CHARACTER*80 AAA
!
80  FORMAT(A80)

```

```

REWIND(16)
1  CONTINUE
READ(16,80,END=999)AAA
  IF (AAA(1:7).NE.'EBLOCK,')GOTO 1
READ(16,*)
DO 2 K=1,NSELM
  READ(16,*)II
  IF (II(11).NE.K)THEN
    WRITE(*,*)K,II(11),' mezery v cislovani prvku - procedura READ_3'
    PAUSE
  ENDIF
  ITETRA(1,K)=II(12)
  ITETRA(2,K)=II(13)
  ITETRA(3,K)=II(14)
  ITETRA(4,K)=II(16)
2  CONTINUE
  K=1
  WRITE(6,*)K,ITETRA(1,K),ITETRA(2,K),ITETRA(3,K),ITETRA(4,K)
  K=NSELM
  WRITE(6,*)K,ITETRA(1,K),ITETRA(2,K),ITETRA(3,K),ITETRA(4,K)
  WRITE(6,*)'v procedure READ_3 byly nacteny prvky'
RETURN
999 WRITE(*,*)'v procedure READ_2 nebyly nacteny uzly'
  WRITE(6,*)'v procedure READ_2 nebyly nacteny uzly'
  STOP
END
!*****
SUBROUTINE READ_4(NCOUP,ICOUP)
! cteni prvkovych cisel
IMPLICIT NONE
INTEGER NCOUP,K,I1,I2
INTEGER ICOUP(2,NCOUP)
CHARACTER*80 AAA
CHARACTER*13 A13
CHARACTER*23 A23
!
80  FORMAT(A80)
11  FORMAT(A13,I8,A23,I8)
REWIND(16)
1  CONTINUE
READ(16,80,END=999)AAA
  IF ((AAA(1:3).NE.'CE,').OR.(AAA(9:13).NE.'DEFL,'))GOTO 1
!
DO 2 K=1,NCOUP
  READ(16,11)A13,I1,A23,I2
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  READ(16,*)
  ICOUP(1,K)=I1
  ICOUP(2,K)=I2
2  CONTINUE
  K=1
  WRITE(6,*)K,ICOUP(1,K),ICOUP(2,K)
  K=NCOUP
  WRITE(6,*)K,ICOUP(1,K),ICOUP(2,K)
  WRITE(6,*)'v procedure READ_4 byly nacteny dvojice uzlu periodicity'
RETURN
999 WRITE(*,*)'v procedure READ_4 nebyly nacteny dvojice uzlu periodicity'
  WRITE(6,*)'v procedure READ_4 nebyly nacteny dvojice uzlu periodicity'
  STOP
END)

```

Formát souboru typu vazba.dat

NCOUP **PPP** **!první řádek**
C*
N1L N2R Nr No Na Tr To Ta kx ky \mu N0 kz
opakuje se NCOUP krát

! první řádek znací počet elementu - kontaktních vazeb (dvojic uzlu) NCOUP a způsob zadání třetí roviny
! parametr PPP=0 --> první vektor je vektor normaly (v cylindrických souřadnicích), druhý vektor je tečný
! parametr PPP=1 --> oba vektory jsou tečné (v kartézských souřadnicích), první z nich je směrem prokluzu
! druhý řádek má následující strukturu
N1L N2R Nr No Na Tr To Ta kx ky \mu N0 kz

kde

N1L je číslo prvního uzlu vazby

N2R je číslo druhého uzlu vazby

(Nr,No,Na) pro parametr 0 v 1.řádku - je vektor normaly kontaktu směřujícího od 1L do 2L, složky jsou vyjádřeny v cylindrických souřadnicích

tj. napr. Nr=skalární součin vektoru normaly a radiačního vektoru v uzlu 1L

- umělý uzel 2L vznikne otočením uzlu 2R o úhel $2\pi/N$ (N je počet sektorů)

(Tr,To,Ta) pro parametr 0 v 1.řádku - je tečný vektor kontaktu, v jehož směru dochází k prokluzu

kx tečná tuhost kontaktu

ky normalová tuhost kontaktu

\mu koeficient tření

N0 předepínací síla kontaktu

Formát souboru typu Frekvence.dat

NN SET FREQ ! první řádek

1 67.120 1 0

2 160.05 2 0

celkem NN krát

NN značí počet vlastních nenulových frekvencí, musí být $NN > N$, kde N je počet vlastních frekvencí z KMENOVÉHO SOUBORU.

Následující řádky pak obsahují pořadové číslo frekvence a samotnou hodnotu vlastní frekvence v Hz. Pro druhý software NOMUVIBLAD-ETW1 značí třetí číslo číslo s počtem nodálních průměrů příslušného tvaru a dále pořadové vlastní číslo vlastní frekvence odpovídající právě uvedenému nodálnímu průměru.

Formát souboru typu Mode.dat

1.

!první řádek

1. 0.10597E-02 0.20554E-01 0.26140E-02

2. 0.98925E-03 0.18272E-01 0.25655E-02

počet opakování odpovídá počtu uzlů modelovaného sektoru

počet opakování takovýchto bloků je NN (je výstupem programu ANSYS)

Začátek každého sektoru obsahuje pořadové číslo vlastního tvaru, další řádky pak číslo uzlu a posuvy ve směru x, y, z .

U software NOMUVIBLAD-ETW1 se vyskytují i vlastní tvary s nenulovým počtem nodálních průměrů. V případě takového vlastního čísla tomuto číslu přísluší dva po sobě zapsané vlastní tvary (jeho reálná a imaginární část dle popsané teorie).

Formát souboru typu prvni_tvar.dat

1.

1. 0.28700E-02 0.44287E-01 0.28408E-06

2. 0.27137E-02 0.39357E-01 0.27623E-06

3. 0.25144E-02 0.34429E-01 0.26625E-06

počet opakování odpovídá počtu uzlů modelovaného sektoru

Totéž jako u souboru Mode.dat s tím, že obsahuje jen jeden tvar (pro nulové vlastní číslo – odpovídající volné rotaci kolem osy symetrie)

Formát souboru typu buzeni:TORZE1.dat

1 ! zadani pomoci sil v uzlech - radialni/obvodova/axialni sila

NF PAR ! pocet uzlu s budici silou - koeficient umernosti

1 0. 631.58 0. 1

2 0. 561.40 0. 1

počet opakování NF

NF značí počet uzlů s budící silou

PAR je koeficient, kterým se ještě následně zadané síly přenásobí

následných NF řádků obsahuje

číslo uzlu - budící síla ve směru radiálním - obvodovém - axiálním -index

(tento index je v případě tohoto software nepodstatný)

9. Popis formátu výstupních souborů

V průběhu výpočtu jsou výstupní informace ukládány do řady souborů, z nichž některé slouží k monitorování výpočtu nebo sloužily k ladění programu. Pro běžné uživatele jsou důležité čtyři z nich, které jsou vytvářeny v ASCII formátu. Jejich další zpracování pro následná grafická vyobrazení nebo tvorbu grafů již musí být provedeno v jiném prostředí nebo jinými programy (např. programem MATLAB). Připravované další verze programu možnosti výstupu ještě vylepší.

Značme dále

n1, n2, ... , nout	čísla uzlů pro výstup, která jsou uvedena ve vstupním KMENOVÉM SOUBORU
name	jméno úlohy (je jménem KMENOVÉHO SOUBORU bez přípony dat)
vazba	číslo zvolené vazby
frek	hodnotu zvolené frekvence

Výstupními soubory jsou

n1_name.OUT
n2_name.OUT
...
nout_name.OUT
NODE_name.out
name_QAMP.OUT
GRAFF_vazba_frekv
GRAFX_vazba_frekv

Soubor n*_name.OUT

obsahuje čtyři sloupce. První sloupec obsahuje bezrozměrný čas probíhající od 0. do 2π , další sloupce pak radiální, obvodový, axiální a celkový (absolutní hodnota vektoru) posuv v příslušném uzlu n*. Při další budící frekvenci se soubor přepíše.

Příklad:

0.0000	-0.97683E-05	-0.32505E-03	0.21181E-03	0.38809E-03
0.0628	-0.10485E-04	-0.34839E-03	0.22925E-03	0.41718E-03
0.1257	-0.11160E-04	-0.37035E-03	0.24579E-03	0.44463E-03
0.1885	-0.11791E-04	-0.39085E-03	0.26136E-03	0.47033E-03
...				
6.0947	-0.74001E-05	-0.24773E-03	0.15475E-03	0.29218E-03
6.1575	-0.82230E-05	-0.27462E-03	0.17448E-03	0.32546E-03
6.2204	-0.90135E-05	-0.30043E-03	0.19353E-03	0.35748E-03

Soubor NODE_name.OUT

První sloupec obsahuje hodnoty budící frekvence, v následujících sloupcích pak hodnoty maximálních amplitud vibrací (posuvů) v příslušných uzlech n1, n2, ..., nout.

Příklad – pro výpočty provedené pro budící frekvence 88Hz a 88.25Hz a s uzly n1, n2, n3 má uvedený soubor tvar:

88.00 0.5783E-03 0.5817E-03 0.5657E-03
 88.25 0.6105E-03 0.6141E-03 0.5972E-03

Soubor GRAFF_vazba_fre

obsahuje sedm sloupců, které dávají informaci o silovém působení v nelineární vazbě během jedné periody.

První sloupec obsahuje bezrozměrný čas probíhající od 0. do 2π .

Druhý sloupec udává hodnotu tangenciální síly ve sledovaném směru prokluzu (směr je zadán v jednom ze vstupních souborů).

Třetí sloupec udává hodnoty proměnlivé složky normálové síly.

Čtvrtý sloupec udává sílu přenášenou kontaktem v tečném směru kolmém na směr pro druhý sloupec (pro správně vypočtený směr prokluzu je nulový; v případě zadání dvou třecích elementů mezi dvěma uzly, pakliže dominantní směr prokluzu neexistuje, se jeho nulovost zajistí volbou nulové tuhosti k_z).

Pátý sloupec udává absolutní hodnoty druhého sloupce (tj. absolutní hodnotu třecí síly).

Šestý sloupec udává celou hodnotu normálové síly i s velikostí předepnutí N_0 .

Sedmý sloupec udává absolutní hodnoty čtvrtého sloupce.

Příklad:

```
0.000000E+00 0.848249E+03 0.741956E+02 0.878336E+01 0.848249E+03 0.174876E+04 0.878336E+01
0.628319E-01 0.911983E+03 0.798030E+02 0.926826E+01 0.911983E+03 0.175044E+04 0.926826E+01
0.125664E+00 0.972118E+03 0.850953E+02 0.971658E+01 0.972118E+03 0.175203E+04 0.971658E+01
...
0.622036E+01 0.781170E+03 0.682957E+02 0.826381E+01 0.781170E+03 0.174699E+04 0.826381E+01
0.628319E+01 0.848251E+03 0.741958E+02 0.878338E+01 0.848251E+03 0.174876E+04 0.878338E+01
```

Soubor GRAFX_vazba_fre

obsahuje čtyři sloupce, které dávají informaci o relativních posuvech v nelineární vazbě během jedné periody.

První sloupec obsahuje bezrozměrný čas probíhající od 0. do 2π .

Druhý sloupec udává hodnoty relativního tangenciálního posuvu mezi uzly vazby (ve směru třecí síly).

Třetí sloupec udává hodnoty relativního normálového posuvu mezi uzly vazby.

Čtvrtý sloupec udává hodnoty relativního tangenciálního posuvu mezi uzly vazby ve směru kolmém na směr prokluzu (pro správně vypočtený směr prokluzu je tento relativní posuv nulový; v případě zadání dvou třecích elementů mezi dvěma uzly se jeho nulovost zajistí volbou nulové tuhosti k_z).